Dio teorije

§ 8. Prva diferencijalna forma plohe

8.1. Gaussove veličine prvoga reda

Neka je zadana ploha S svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}, \qquad (u, v) \in D. \tag{1}$$

Tada se za plohu S definiraju funkcije: $E, F, G : D \to \mathbf{R}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} E &= \vec{r}_u^{\,2} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ G &= \vec{r}_v^{\,2} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Veličine E, F i G definirane sa (2) zovemo *Gaussovim osnovnim (fundamentalnim) veličinama prvoga reda* ili koeficijentima prve diferencijalne forme.

8.2. Duljina luka krivulje na plohi. Prva diferencijalna forma plohe

Ako je zadana krivulja α na plohi S sa:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(\mathrm{u}(t), v(t)),\ t \in I$$

i ako su $\vec{r}(t_1)$ i $\vec{r}(t_2)$ radijvektori dviju njezinih točaka A i B onda je realan broj:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \tag{3}$$

duljina luka krivulje na plohi od točke A do točke B.

Promotrimo funkciju $s(t) : I \to \mathbf{R}$ za krivulju α na plohi S definiranu sa:

$$s(t) = \int_{a}^{t} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = \int_{a}^{t} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{4}$$

Tada jednadžbu (4) možemo pisati u diferencijalnom obliku ovako:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \equiv I \tag{5}$$

koji se zove *prva diferencijalna ili fundamentalna forma plohe*. Još se zove i metrička ili kvadratna forma plohe i označuje sa I.

Formom I određeno je mjerenje duljina krivulja na plohi. Kažemo da je formom I dana *metrika* na plohi.

8.3. Kut između dviju krivulja na plohi definira se kao kut između njihovih tangenata u presječnoj točki M

Neka su zadane krivulja α i β sa:

$$\alpha \ldots \vec{r}_1(t) = \vec{r}(u(t), v(t)), \quad \text{tj. } u = u(t),\ v = v(t)$$

$$\beta \ldots \vec{r}_2(t) = \vec{r}(\bar{u}(t), \bar{v}(t)), \quad \text{tj. } u = \bar{u}(t),\ v = \bar{v}(t)$$

tada su njihovi tangentni vektori dani s:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt},$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{r}_u \frac{d\bar{u}}{dt} + \vec{r}_v \frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Kut ω između dviju krivulja na plohi u presječnoj točki M jednak je tada:

$$\cos\omega = \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{|d\vec{r}_1|\,|d\vec{r}_2|} = \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{\sqrt{d r_1^2}\sqrt{d r_2^2}}, \text{ tj.}$$

$$\cos\omega = \frac{E\,du\,d\bar{u} + F(du\,d\bar{v} + dv\,d\bar{u}) + G\,dv\,d\bar{v}}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\ \sqrt{E\,d\bar{u}^2 + 2F\,d\bar{u}\,d\bar{v} + G\,d\bar{v}^2}}, \tag{6}$$

gdje su:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u\,du + \vec{r}_v\,dv,$$

$$d\vec{r}_1 = \vec{r}_u\,d\bar{u} + \vec{r}_v\,d\bar{v},$$

Napomena: Gaussove veličine E, F, G u (6) računamo u točki M.

Specijalni slučajevi:

a) Kut između krivulje na plohi i u-krivulje dan je izrazom (tada je β u-krivulja, tj. $\bar{v} = \text{const.}$, $d\bar{v} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{E\,du + F\,dv}{\sqrt{E}\ \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}.$$

b) Kut između krivulje na plohi i v-krivulje dan je izrazom (tada je β v-krivulja, tj. $\bar{u} = \text{const.}$, $d\bar{u} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{E\,du + G\,dv}{\sqrt{G}\ \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}.$$

c) Kut između koordinatnih u i v-krivulja dan je izrazom (tada je krivulja α u-krivulja, tj. $v = \text{const.}$, $dv = 0$, a krivulja β v-krivulja tj. $\bar{u} = \text{const.}$, $d\bar{u} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

d) Ako su krivulje α i β na plohi međusobno okomite, tada je:

$$E\,du\,d\bar{u} + F(du\,d\bar{v} + dv\,d\bar{u}) + G\,dv\,d\bar{v} = 0.$$

e) Uvjet okomitosti koordinatnih u i v krivulja prema c) glasi:

$$F = 0.$$

8.4. Ploština omeđenog dijela plohe

Neka je dana ploha S svojom jednadžbom $\vec{r}=\vec{r}(u, v)$ i na njoj zatvoreno područje (K). Tada je ploština područja (K) jednaka:

$$S=\iint_{(K)} dS=\iint_{D} |\vec{r}_{u}\times\vec{r}_{v}|\, du\, dv=\iint_{D}\sqrt{EG-F^2}\, du\, dv, \tag{7}$$

gdje je D zatvoreno područje u ravnini takvo da je $\vec{r}(D)=(K)$.
Ovdje, naime, vrijedi (vidi zad. 2):

$$|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|^2=\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v)^2=EG-F^2. \tag{8}$$

Izraz:

$$EG-F^2=W^2 \tag{9}$$

koji je uvijek pozitivan zove se *diskriminanta prve diferencijalne forme* ili Weingartenova funkcija.

Uvjet (6) iz § 6, tj. $\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq\vec{0}$ sada postaje $EG-F^2\neq 0$.

Jedinični vektor normale iz § 7.1. sada glasi:

$$\vec{N}^0=\frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}. \tag{10}$$

Zadaci

266. Zadana je sfera svojom parametrizacijom (vidi zad. 204):

$$\vec{r}=\{r\sin u\cos v, r\sin u\sin v, r\cos u\},\quad u\in[0,\pi],\quad v\in[-\pi,\pi].$$

1° Naći prvu diferencijalnu formu pridruženu toj parametrizaciji.
2° Naći tangencijalnu ravninu u točkama za koje je $u=0$ i $u=\pi$.

1° Prva diferencijalna forma glasi:

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2.$$

Kako je:

$$\vec{r}_u=\{r\cos u\cos v, r\cos u\sin v, -r\sin u\}$$
$$\vec{r}_v=\{-r\sin u\sin v, r\sin u\cos v, 0\},$$

to je:

$$E=\vec{r}_u^{\,2}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=$$
$$=(r\cos u\cos v)^2+(r\cos u\sin v)^2+(-r\sin u)^2=r^2,$$
$$G=\vec{r}_v^{\,2}=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=$$
$$=(-r\sin u\sin v)^2+(r\sin u\sin v)^2+(0)^2=r^2\sin^2 u,$$

Izabrani zadaci za vježbu
(iz lekcije "Prva diferencijalna forma plohe")

266. Zadana je sfera svojom parametrizacijom (vidi zad. 204):

$$\vec{r} = \{ r\sin u \cos v, r\sin u \sin v, r\cos u \}, \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [-\pi, \pi].$$

1° Naći prvu diferencijalnu formu pridruženu toj parametrizaciji.

2° Naći tangencijalnu ravninu u točkama za koje je $u = 0$ i $u = \pi$.

1° Prva diferencijalna forma glasi:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Kako je:

$$\vec{r}_u = \{ r\cos u \cos v, r\cos u \sin v, -r\sin u \}$$
$$\vec{r}_v = \{ -r\sin u \sin v, r\sin u \cos v, 0 \},$$

to je:

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 =$$
$$= (r\cos u \cos v)^2 + (r\cos u \sin v)^2 + (-r\sin u)^2 = r^2,$$
$$G = \vec{r}_v^{\,2} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 =$$
$$= (-r\sin u \sin v)^2 + (r\sin u \sin v)^2 + (0)^2 = r^2 \sin^2 u,$$

$$F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v=\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\ \frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial z}{\partial v}=$$

$$=-r\sin u\cos u\sin v\cos v+r\sin u\cos u\sin v\cos v-0\cdot r\sin u=0.$$

Tada prva diferencijalna forma glasi:

$$I=r^2\,du^2+r^2\sin^2 u\,d\,v^2.$$

Ovo možemo pisati i ovako:

$$\vec{r}=\{\,r\cos\phi\,\sin\theta,\ r\sin\phi\,\sin\theta,\ r\cos\theta\},$$

prva diferencijalna forma:

$$I=r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\,\phi^2+r^2\mathrm{d}\theta^2.$$

2° Točka A_1 za $u=0$, $v=$ proizvoljno, je sjeverni pol sfere, dok je točka A_2 za $u=\pi$, $v=$ proizvoljno, južni pol sfere. Obje ove točke su singularne točke geografske koordinatne (parametarske) mreže (u, v) sfere, jer: 1. svi meridijani (u-linije) $v=$ const. se sastaju u sjevernom i južnom polu, a 2. pripadne paralele $u_{A1}=0$ i $u_{A2}=\pi$ su degenerirale u jednu jedinu točku (A_1 odnosno A_2). Uvjet regularnosti iz § 7.1. nije ispunjen. U tim točkama ipak postoje tangencijalne ravnine. Sfera ima implicitnu jednadžbu:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Odavde proizlazi da je:

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+\sqrt{r^2-x^2-y^2}\,\vec{k}$$

parametrizacija za gornju, a

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}-\sqrt{r^2-x^2-y^2}\,\vec{k}$$

parametrizacija za donju polusferu,
pa tangencijalne ravnine u točkama $A_1=(0, 0, \mathrm{r})$ i $A_2=(0, 0, -\mathrm{r})$ imaju jednadžbu (tablica 4):

$$Z\pm r=0\,(X-0)-0\,(Y-0),$$

odnosno:

$$Z=\pm r.$$

Točke A_1 i A_2 u ovoj parametrizaciji nisu više singularne, čak je u njima $EG-F^2=1$.

267. Naći prvu diferencijalnu formu ravnine u odnosu na parametrizaciju:

$$x=x_0+l_1u+l_2v$$
$$y=y_0+m_1u+m_2v$$
$$z=z_0+n_1u+n_2v,\qquad \text{(vidi zad. 216).}$$

Kako je:

$$E=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right)^2=l_1^2+m_1^2+n_1^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2=l_2^2+m_2^2+n_2^2,$$

$$F=\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2,$$

to je:

$$ds^2=(l_1^2+m_1^2+n_1^2)\,du^2+2\,(l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2)\,du dv+(l_2^2+m_2^2+n_2^2)\,dv^2.$$

Ako su parametarske u i v crte zadane jediničnim vektorima, tada je:

$$ds^2=du^2+2\cos\omega\, du dv+dv^2,$$

gdje je ω kut između pravaca u i v.
Ako su još pravci u i v međusobno okomiti, tada je prva diferencijalna forma:

$$I=du^2+dv^2 \quad \text{ili} \quad I=dx^2+dy^2.$$

Ako je XOY ravnina parametrizirana polarnim koordinatama:

$$x=\varrho\cos\phi$$
$$x=\varrho\sin\phi$$
$$z=0,$$

tada je njena prva diferencijalna forma:

$$I=d\varrho^2+\varrho^2\, d\phi^2.$$

268. Naći prvu diferencijalnu formu rotacione plohe (vidi zad. 215):

$$x=f(u)\cos v,\qquad y=f(u)\sin v,\qquad z=g(u),$$

gdje je os rotacije os OZ.
Imamo:

$$E=\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2=(f'\cos v)^2+(f'\sin v)^2+(g')^2=f'^2+g'^2$$

$$G=\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2=(-f\sin v)^2+(f\cos v)^2+(0)^2=f^2$$

$$F=\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=-ff'\sin v\cos v+ff'\sin v\cos v+0\,g'=0,$$

pa je prva diferencijalna forma:

$$ds^2=(f'^2+g'^2)\,du^2+f^2\,dv^2.$$

Napomenimo da koordinatne krivulje u i v ove rotacione plohe čine ortogonalnu mrežu jer je $F=0$.

269. Pokazati da postoji takva parametrizacija rotacione plohe da prva kvadratna forma ima oblik:

$$ds^2=du^2+G(u)\,dv^2.$$

Prema zad. 268. prva diferencijalna forma rotacione plohe ima oblik:

$$ds^2 = (f'^2(u) + g'^2(u))\, du^2 + f^2(u)\, dv^2.$$

Vidi se da se ona dade svesti na prvi oblik. Dovoljno je uvesti transformaciju parametara zadanu s:

$$\bar{u} = \int \sqrt{f'^2 + g'^2}\, du, \qquad \bar{v} = v.$$

270. Naći prvu diferencijalnu formu plohe zadane eksplicitnom jednadžbom $z = z(x, y)$, (vidi zad. 214).

Vektorska jednadžba zadane plohe glasi:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\,\vec{k}.$$

Kako je:

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right)^2 = (1)^2 + (0)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 1 + p^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right)^2 = (0)^2 + (1)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + q^2,$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + pq = pq,$$

to je prva diferencijalna forma:

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2,$$

odnosno:

$$ds^2 = (1 + p^2)\, dx^2 + 2pq dx dy + (1 + q^2)\, dy^2.$$

(Ovdje je $p = z_x$, $q = z_y$; vidi § 7, tj. 7.2. i 7.3.)

271. Zadana je ploha:

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{a} + \sin u\,\vec{b} + v\vec{c}, \qquad u, v \in \mathbf{R},$$

gdje su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ zadani vektori.

a) Ispitati što su koordinatne krivulje.
b) Odrediti koeficijente E, F, G prve kvadratne forme.
c) Kada će se koordinatne krivulje ove plohe sjeći ortogonalno?
d) Naći element ploštine dS dane plohe.

a) Koordinatne v-krivulje jesu (za $u = u_0 = \text{const.}$):

$$\vec{r} = u_0\vec{a} + \vec{b}\sin u_0 + v\vec{c}$$

što je jednadžba pravca točkom $M_0(\vec{r}_0 = u_0\vec{a} + \vec{b}\sin u_0)$ a paralelne s vektorom $\vec{c}$.

Koordinatne u-krivulje jesu (za $v = v_0 = \text{const.}$):

$$\vec{r} = u\,\vec{a} + \sin u\,\vec{b} + v_0\vec{c}.$$

To su kose sinusoide u ravnini paralelnoj s ravninom određenom vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Skicirajte ih.

b) $E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (\vec{a} + \vec{b}\cos u)^2$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 = (\vec{c})^2$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}\cos u.$$

c) Koordinatne u i v krivulje sjeći će se ortogonalno za $\vec{c} = k(\vec{a} \times \vec{b})$, jer je tada:

$$F = k(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} + k(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b}\cos u = 0.$$

d) $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, dudv = |(\vec{a} + \vec{b}\cos u) \times \vec{c}|\, dudv =$
$= |(\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})\cos u|\, dudv.$

Ako su koordinatne krivulje međusobno ortogonalne, tada je $F = 0$, pa je element ploštine:

$$dS = \sqrt{EG}\, dudv = k\sqrt{(\vec{a} \times \vec{b})^2\, (\vec{a} + \vec{b}\cos u)^2}\, dudv.$$

272. Na plohi (sfera):

$$\vec{r} = \{a\cos v\sin u,\ a\sin v\, sin\, u,\ a\cos u\}, \qquad u \in [0, \pi],\ v \in [0{,}2\,\pi],$$

zadane su dvije krivulje c_1 i c_2 sa $c_1 : u = v$ i $c_2 : \bar{u} + \bar{v} = \frac{\pi}{2}$.

a) Naći sjecišta zadanih krivulja.

b) Odrediti kut pod kojim se sijeku zadane krivulje.

Prvi način – direktan

a) Te krivulje imaju jednadžbe:

$$c_1 : \vec{r}_1 = \{a\sin u\cos u,\ a\sin^2 u,\ a\cos u\}$$
$$c_2 : \vec{r}_2 = \{a\sin^2 u,\ a\sin u\cos u,\ a\cos u\},$$

a njihova sjecišta:

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{za } u = \frac{\pi}{4},$$

$$(0,\ 0,\ a) \text{ za } u = 0, \qquad (0,\ 0,\ -a) \text{ za } u = \pi.$$

b) Kut pod kojim se sijeku dvije krivulje jest kut između njihovih tangenata u sjecištima tih krivulja.
Tangente na zadane krivulje imaju smjer:

$$\frac{d\vec{r}_1}{du} = \{a\cos 2u, a\sin 2u,\ -a\sin u\}$$

$$\frac{d\vec{r}_2}{du} = \{a\sin 2u, a\cos 2u,\ -a\sin u\},$$

pa je kut između tih dviju krivulja jednak:

$$\cos\omega = \frac{\dfrac{d\vec{r}_1}{du}\cdot\dfrac{d\vec{r}_2}{du}}{\left|\dfrac{d\vec{r}_1}{du}\right|\,\left|\dfrac{d\vec{r}_2}{du}\right|}\ \frac{\sin 4u + \sin^2 u}{1+\sin^2 u}.$$

Za $u=\dfrac{\pi}{4}$ traženi kut je:

$$\cos\omega = \frac{1}{3}, \qquad \omega = \arccos\frac{1}{3}.$$

U točkama $A=(0,\ 0,\ \mathrm{a})$ i $B=(0,\ 0,\ -\mathrm{a})$ krivulje se sijeku pod pravim kutom.

Napomenimo, da u sve tri točke egzistiraju tangente na obje krivulje, jer su sve tri točke regularne točke krivulje (vidi § 4.2).

Drugi način pomoću formule:

b) $$\cos\omega = \frac{Edud\bar{u} + F(dud\bar{v} + dvd\bar{u}) + Gdvd\bar{v}}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\ \sqrt{Ed\bar{u}^2 + 2Fd\bar{u}d\bar{v} + Gd\bar{v}^2}}.$$

Kako je (vidi zad. 266.1°):

$$E=a^2,\ G=a^2\sin^2 u, \qquad F=0, \qquad EG-F^2=a^4\sin^2 u.$$

to je:

$$\cos\omega = \frac{Edud\bar{u} + Gdvd\bar{v}}{\sqrt{Edu^2+Gdv^2}\ \sqrt{Ed\bar{u}^2+Gd\bar{v}^2}} =$$

$$= \frac{a^2dud\bar{u} + a^2\sin^2 udvd\bar{v}}{\sqrt{a^2du^2+a^2\sin^2 udv^2}\ \sqrt{a^2d\bar{u}^2+a^2\sin^2 ud\bar{v}^2}}$$

$$\cos\omega = \frac{dud\bar{u} + \sin^2 udvd\bar{v}}{\sqrt{du^2+\sin^2 udv^2}\ \sqrt{d\bar{u}^2+\sin^2 ud\bar{v}^2}}.$$

Za krivulju c_1 $\quad v=u$ imamo $dv=du$, a za krivulju c_2 $\quad \bar{v}=\dfrac{\pi}{2}-u$ imamo $d\bar{v}=-d\bar{u}$, pa je:

$$\cos\omega = \frac{dud\bar{u} + \sin^2 ududu\bar{u}}{\sqrt{du^2+\sin^2 udu^2}\ \sqrt{d\bar{u}^2+\sin^2 ud\bar{u}^2}} = \frac{1-\sin^2 u}{1+\sin^2 u},$$

$$\cos\omega = \frac{\cos^2 u}{1+\sin^2 u}.$$

U točki $u=\dfrac{\pi}{4}$ traženi kut je $\omega=\arccos\dfrac{1}{3}$.

Za prvu točku rezultat je, dakle, isti kao na prvi način i to zbog toga što je ta točka regularna točka parametrizacije $\left(EG-F^2=\dfrac{a^4}{2}\neq 0\right)$. Međutim, točke $u=0$ i $u=\pi$, tj. $A=(0,\ 0,\ a)$ i $(0,\ 0,\ -a)$ jesu polovi kugle, one su *singularne točke parametarske mreže* (vidi zad. 266. 2° i § 7.1.b). U takvim točkama ne možemo na taj način računati kut između krivulja.

U singularnim točkama parametarske mreže kugle (ili bilo koje druge plohe) kut između dviju krivulja na plohi potražit ćemo direktno kao na prvi način (tj. neovisno o plohi), ako su to regularne točke krivulje. Može se također odabrati i druga parametrizacija za koju te točke nisu singularne kao npr. u zadacima 266. i 323.

273. Naći kut pod kojim se sijeku krivulje

$$x = x_0, \quad y = y_0 \text{ na plohi } z = axy.$$

Ploha ima vektorsku jednadžbu:

$$\vec{r} = \{x, y, a\, x\, y\}, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Krivulje $x = x_0$ i $y = y_0$ su koordinatne krivulje te parametrizacije i imaju jednadžbe:

$$\vec{r}_1 = \{x_0, y, \quad a\, x_0\, y\},$$
$$\vec{r}_2 = \{x, y_0, \quad a\, x\, y_0\}.$$

Tangentni vektori tih krivulja jesu:

$$\frac{d\vec{r}_1}{dy} = \{0, 1, a x_0\},$$
$$\frac{d\vec{r}_2}{dx} = \{1, 0, a y_0\},$$

pa je kut između njih dan sa:

$$\cos\omega = \frac{a^2 x_0 y_0}{\sqrt{1 + a^2 x_0^2}\,\sqrt{1 + a^2 y_0^2}}.$$

Taj smo kut mogli odrediti i na drugi način: on se, naime, podudara s kutom između koordinatnih krivulja, a taj je dan formulom:

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Kako je:

$$E = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\right)^2 = 1 + a^2 y_0^2,$$
$$G = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right)^2 = 1 + a^2 x_0^2,$$
$$F = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = a^2 x_0 y_0,$$

to je:

$$\cos\omega = \frac{a^2 x_0 y_0}{\sqrt{(1+a^2y_0^2)\ (1+a^2x_0^2)}}.$$

274. Naći izraz za ploštinu zatvorenog područja (K) na plohi $z = z(x, y)$. Jednadžba plohe ima vektorsku jednadžbu:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\vec{k}.$$

Kako je:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial x}\vec{k} = \vec{i} + p\vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{k} = \vec{j} + q\vec{k},$$

to je:

$$E = \vec{r}_x^{\,2} = 1 + p^2, \quad G = \vec{r}_y^{\,2} = 1 + q^2,$$

$$F = \vec{r}_x \cdot \vec{r}_y = pq.$$

$$EG - F^2 = (1+p^2)\ (1+q^2) - (pq)^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

Tada je ploština:

$$S = \iint\limits_{(K)} \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

gdje je D_{xy} ono zatvoreno područje u ravnini XOY za koje je $\vec{r}(D_{xy}) = (K)$.

275. Naći ploštinu četverokuta na helikoidu (vidi zad. 220):

$$x = au\cos v$$

$$y = au\sin v$$

$$z = bv, \quad u, v \in \mathbf{R},$$

omeđenog krivuljama $u = 0$, $u = \frac{b}{a}$, $v = 0$, $v = 1$.

Imamo:

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (a\cos v)^2 + (a\sin v)^2 + (0)^2 = a^2$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = (-au\sin v)^2 + (au\cos v)^2 + (b)^2 = a^2u^2 + b^2$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 0.$$

$$S = \iint\limits_{(K)} \sqrt{a^2(a^2u^2 + b^2)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = a\int_0^{\frac{b}{a}} \sqrt{a^2u^2 + b^2}\,\mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{d}v = a\int_0^{\frac{b}{a}} \sqrt{a^2u^2 + b^2}\,\mathrm{d}u.$$

Označimo neodređeni integral s I i računajmo:

$$I = \int \sqrt{a^2u^2+b^2}\,du = \int \frac{a^2u^2+b^2}{\sqrt{a^2u^2+b^2}}\,du = b^2 \int \frac{du}{\sqrt{a^2u^2+b^2}} +$$

$$+ a^2 \int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2u^2+b^2}}.$$

Kako je prvi integral:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2u^2+b^2}} = \left| \begin{array}{l} a^2u^2 = b^2t^2 \\ au \quad = bt \\ a\,du = b\,dt \end{array} \right| = \frac{b}{a} \int \frac{dt}{\sqrt{b^2t^2+b^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{a} \ln \left(\frac{au}{b} + \sqrt{\frac{a^2u^2}{b^2}+1} \right) = \frac{1}{a} \ln \frac{au + \sqrt{a^2u^2+b^2}}{b},$$

a drugi integral:

$$\int u \frac{u\,du}{\sqrt{a^2u^2+b^2}} = \frac{u}{a^2} \sqrt{a^2u^2+b^2} - \frac{1}{a^2} \int \sqrt{a^2u^2+b^2}\,du,$$

to je:

$$I = \frac{b^2}{a} \ln \frac{au + \sqrt{a^2u^2+b^2}}{b} + u\sqrt{a^2u^2+b^2} - \int \underbrace{\sqrt{a^2u^2+b^2}\,du}_{I}.$$

Odavde je:

$$I = \frac{b^2}{2a} \ln \frac{au + \sqrt{a^2u^2+b^2}}{b} + \frac{u}{2} \sqrt{a^2u^2+b^2},$$

pa je površina:

$$S = \left[\frac{b^2}{2} \ln \frac{au + \sqrt{a^2u^2+b^2}}{b} + \frac{au}{2} \sqrt{a^2u^2+b^2} \right] \Bigg|_0^{\frac{b}{a}}$$

$$S = \frac{b^2}{2} [\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}].$$

276. Krivulja koja siječe meridijane neke rotacione plohe pod konstantnim kutom α zove se *loksodroma*. Naći jednadžbu loksodrome na rotacionoj plohi:

$$\vec{r} = \{ f(u)\cos v, \quad f(u)\sin v, \quad g(u) \}.$$

Kut između neke krivulje na plohi za koju je $du \neq 0$ i $dv \neq 0$ i meridijana prema § 8.3.a) jednak je radi $F = 0$ (vidi zad. 268):

$$\cos\omega \frac{\sqrt{E}\,\mathrm{d}u}{\sqrt{E\,\mathrm{d}u^2+G\,\mathrm{d}v^2}}.$$

Za zadanu parametrizaciju prva diferencijalna forma ima oblik:

$$\mathrm{d}s^2=(f'^2+g'^2)\,\mathrm{d}u^2+f^2\mathrm{d}v^2,$$

pa diferencijalna jednadžba loksodrome glasi:

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{f'^2+g'^2}\,\mathrm{d}u}{\sqrt{(f'^2+g'^2)\,\mathrm{d}u^2+f^2\mathrm{d}v^2}},\quad \cos\alpha=\mathrm{const.}$$

odnosno:

$$f^2\cos^2\alpha\,\mathrm{d}v^2=(f'^2+g'^2)\,(1-\cos^2\alpha)\,\mathrm{d}u^2,$$

odnosno:

$$f dv=\pm\sqrt{f'^2+g'^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{d}u.$$

Odavde integracijom dobivamo:

$$v=\pm\,\mathrm{tg}\,\alpha\int_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{f'^2+g'^2}{f^2}}\,\mathrm{d}u.$$

Ako je parametrizacija rotacione plohe odabrana kao u zad. 269, onda prva diferencijalna forma ima oblik:

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+G(u)\,\mathrm{d}v^2,$$

pa diferencijalna jednadžba loksodrome glasi:

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\mathrm{d}u^2+G(u)\,\mathrm{d}v^2}}.$$

Integracijom dobijemo:

$$v=\pm\,\mathrm{tg}\,\alpha\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{G(u)}}.$$

277. Naći jednadžbu loksodrome na sferi:

$$\vec{r}=\{r\sin\theta\cos\phi,\quad r\sin\theta\sin\phi,\quad r\cos\theta\},$$

i naći njenu duljinu luka (vidi zad. 266).

Za sferu je $E=r^2$, $G=r^2\sin^2\theta$, $F=0$, prva diferencijalna forma:

$$\mathrm{d}s^2=r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2+r^2\,\mathrm{d}\theta^2.$$

Prema prethodnom zadatku kut između krivulja na kugli za koje je $\mathrm{d}\theta\neq 0$ i $\mathrm{d}\phi\neq 0$ i meridijana dan je sa:

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{E}\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{E^2\mathrm{d}\theta^2+G\,\mathrm{d}\phi^2}}.$$

Zato je diferencijalna jednadžba loksodrome na sferi:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{r^2}\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)}},$$

odnosno:

$$\cos^2\alpha\,(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2) = \mathrm{d}\theta^2.$$

Jednadžba loksodrome kao rješenje navedene diferencijalne jednadžbe glasi:

$$\phi = \pm\ \mathrm{tg}\alpha \ln \mathrm{tg}\frac{\theta}{2} + C.$$

Napišimo jednadžbu loksodrome pomoću geografske širine $\psi = 90° - \theta$. Tada imamo:

$$\phi = \pm\ \mathrm{tg}\,\alpha \ln\left[\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\psi}{2}\right)\right]^{-1} + C,$$

$$\phi = \pm\ \mathrm{tg}\,\alpha \ln \mathrm{ctg}\left(45° - \frac{\psi}{2}\right) + C,$$

odnosno:

$$\phi = \pm\ \mathrm{tg}\,\alpha \ln \mathrm{tg}\left(45° + \frac{\psi}{2}\right) + C.$$

Loksodroma je, dakle, krivulja koja se omata spiralno oko sjevernog ($\theta = 0$, ϕ = proizv.) odnosno oko južnog pola ($\theta = \pi$, ϕ = proizv.), no u polove nikad ne stiže, a pritom siječe meridijane pod istim konstantnim kutom.

Usprkos tome loksodroma ima konačnu duljinu. Element duljine luka bilo koje krivulje na sferi dan je sa:

$$\mathrm{d}s = r\sqrt{\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}\theta^2}.$$

Odavde je:

$$s = r\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{1+\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Uzmemo li u obzir diferencijalnu jednadžbu loksodrome, imamo da je duljina luka loksodroma:

$$s = r\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta,$$

$$s = r\,\frac{\theta_2-\theta_1}{\cos\alpha}.$$

Duljina loksodrome između dviju paralela ovisi samo o razlici širina $\theta_2 - \theta_1$ za zadani kut α. Ako je $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, onda je duljina luka loksodrome između polova:

$$s = \frac{r\pi}{\cos\alpha}.$$

Njezina je duljina, dakle, konačna veličina za $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ (α je kut pod kojim loksodroma siječe meridijane sfere!). Za $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ se loksodroma podudara s paralelom (kojih ima više).

U zadacima od 278. do 287. naći prvu kvadratnu formu za sljedeće (rotacione) plohe:

278. $x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = c\cos u;\ u \in [0, \pi],\ v \in [0, 2\pi]$, rotacioni (kružni) elipsoid;

279. $x = R\cos v,\ y = R\sin v,\ z = u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, kružni valjak;

280. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = ku;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, kružni stožac;

281. $z^2 = x^2 + y^2$, kružni stožac;

282. $x = au\cos v,\ y = au\sin v,\ z = u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, rotacioni paraboloid (vidi zad. 334 i 372);

283. $x = a\,\mathrm{ch}\,u\cos v,\ y = a\,\mathrm{ch}\,u\sin v,\ z = c\,\mathrm{sh}\,u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, jednoplošni rotacioni hiperboloid;

284. $x = a\,\mathrm{sh}\,u\cos v,\ y = a\,\mathrm{sh}\,u\sin v,\ z = c\,\mathrm{ch}\,u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, dvoplošni rotacioni hiperboloid;

285. $x = (a + b\cos u)\cos v,\ y = (a + b\cos u)\sin v,\ z = b\sin u;\ u, v \in [0, 2\pi]$, torus;

286. $x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = a\left(\ln\mathrm{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right);\quad u \in \mathbf{R}_+,$ $v \in [0, 2\pi]$, pseudosfera;

287. $x = a\,\mathrm{ch}\frac{u}{a}\cos v,\ y = a\,\mathrm{ch}\frac{u}{a}\sin v,\ z = u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, katenoid (vidi zad. 221).

288. Naći prvu diferencijalnu formu helikoida:

$$x = au\cos v,\ y = au\sin v,\ z = bv;\quad u, v \in \mathbf{R}.$$

289. Naći prvu diferencijalnu formu koordinatne XOY ravnine parametrizirane sa:

$$x = u,\ y = v,\ z = 0,\quad u, v \in \mathbf{R}.$$

290. Naći prvu diferencijalnu formu elipsoida (vidi zad. 227):

$$x = a\sin u\cos v,\ y = b\sin u\sin v,\ z = c\cos u,\ u \in [0, \pi],\ v \in [0, 2\pi].$$

291. Odrediti plohu čija je prva diferencijalna forma:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}\left[(2x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x^2 + 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (x^2 + 2y^2)\,\mathrm{d}y^2\right]$$

i na kojoj se nalazi kružnica $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$.

292. Odrediti prvu diferencijalnu formu, izračunati $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, du\, dv$ za plohu i ispitati kakve su krivulje na plohi u i v linije ako je:

$$\vec{r} = \cos u\, \vec{i} + \sin u\,(\cos v\, \vec{j} + \sin v\, \vec{k});\; u \in [0, \pi],\; v \in [-\pi, \pi].$$

293. Odrediti prvu diferencijalnu formu, izračunati element ploštine dS plohe i ispitati kakve su krivulje na plohi u i v linije ako je:

$$\vec{r} = (u + v^2)\,\vec{a} + (v + u^2)\,\vec{b} + uv\,\vec{c};\; u, v \in \mathbf{R}.$$

($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ konstantni vektori).

294. Ako je porodica krivulja na plohi zadana diferencijalnom jednadžbom:

$$A\, du + B\, dv = 0,$$

tada je jednadžba ortogonalnih trajektorija, tj. krivulja koje sijeku zadane krivulje pod pravim kutem dana s:

$$(BE - AF)\, du + (BF - AG)\, dv = 0.$$

Dokazati.

295. Sastaviti diferencijalnu jednadžbu ortogonalnih trajektorija porodice krivulja

$$\phi(u, v) = \text{const.}$$

na plohi $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.

296. Naći ortogonalne trajektorije porodice krivulja

$$u + v = \text{const.}$$

koje leže na kugli:

$$\vec{r} = \{R \sin u \cos v,\, R \sin u \sin v,\, R \cos u\};\quad u \in [0, \pi],\quad v \in [-\pi, \pi].$$

297. Na kružnom stošcu:

$$x = u \cos v,\; y = u \sin v,\; z = u;\quad u \in \mathbf{R},\quad v \in [0, 2\pi],$$

promatrati porodicu krivulja:

$$v = u^2 + \alpha,$$

gdje je α parametar. Naći porodicu njihovih ortogonalnih trajektorija.

298. Dokazati da uvjet ortogonalnosti dviju porodica krivulja na plohi koje su određene diferencijalnom jednadžbom:

$$A(u, v)\, du^2 + 2B(u, v)\, du\, dv + C(u, v)\, dv^2 = 0$$

glasi:
$EC = 2BF + AG = 0.$

299. Dokazati da na helikoidu:

$$x = u \cos v,\; y = u \sin v,\; z = av,\quad u, v \in \mathbf{R}$$

diferencijalna jednadžba:

$$du^2 - (u^2 + a^2)\, dv^2 = 0$$

određuje ortogonalnu mrežu parametarskih linija.

300. Pokazati da se krivulje:

$$\sin u + a(v+1) = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{a}{\sin^3 u} + v = b$$

(a, b = const.) na plohi:

$$\vec{r} = \left\{ \sin u \cos v,\ \sin u \sin v,\ \cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right\}, \quad u \in \mathbf{R}_+, \quad v \in [0, 2\pi],$$

sijeku ortogonalno.

301. Na plohi:

$$\vec{r} = \{ u,\ v,\ uv \}, \quad u,\ v \in \mathbf{R}$$

dane su dvije krivulje: $c_1 : u^2 + v^2 = 1$ i $c_2 : v = a u$.

a) Naći presječne točke danih krivulja.
b) Odrediti kut pod kojim se sijeku te krivulje.
c) Koliko je a da se krivulje sijeku ortogonalno?

302. Odrediti ortogonalne trajektorije koordinatnih krivulja plohe:

$$\vec{r} = \{ u \cos v,\ u \sin v,\ u + v \}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

303. Odrediti ortogonalne trajektorije koordinatnih krivulja plohe:

$$\vec{r} = \{ v \cos u - a \sin u,\ v \sin u + a \cos u,\ a u \} \ (a > 0), \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

304. Dana je ploha:

$$x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = uv, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

a) Naći prvu kvadratnu formu.
b) Izračunati diferencijal duljine luka za krivulje $u = 2$, $v = 1$, $v = au$.
c) Izračunati duljinu luka krivulje $v = au$ između točaka njenog presjeka s krivuljama $u = 1$, $u = 2$.

305. Naći pod kojim se kutem sijeku krivulje:

$$u + v = 0,\ u - v = 0$$

na helikoidu:

$$x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = a v, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

306. Naći kut pod kojim krivulja:

$$v = A e^{mu}$$

siječe izvodnice kružnog stošca:

$$x = v \cos u \cos \alpha,\ y = v \sin u \cos \alpha,\ z = v\, sin\, \alpha,\ u \in [0, 2\pi],\ v \in \mathbf{R},$$

gdje je α parametar.

307. Na plohi s prvom kvadratnom formom:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + \operatorname{sh}^2 u\, \mathrm{d}v^2$$

naći duljinu luka krivulje $v = u$ među točkama $M_1(u_1, v_1)$ i $M_2(u_2, v_2)$.

308. Naći kut među krivuljama

$$v = 2u, \quad v = -2u$$

na plohi koja ima prvu kvadratnu formu:

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

309. Naći kut između krivulja zadanih jednadžbama:

$$v = u + 1 \quad \text{i} \quad v = 3 - u$$

na plohi:

$$x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = u^2, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi].$$

310. Na helikoidu:

$$x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = av, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

zadane su krivulje svojim jednadžbama:

$$v = \ln(u \pm \sqrt{u^2 + a^2}) + c.$$

Izračunati duljinu luka tih krivulja između točaka

$$M_1(u_1, v_1) \quad \text{i} \quad M_2(u_2, v_2).$$

311. Na pseudosferi:

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v,$$

$$z = a\left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u\right), \quad u \in \mathbf{R}_+, \quad v \in [0, 2\pi]$$

zadane su dvije porodice krivulje svojim jednadžbama:

$$v = \pm \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + c.$$

Izračunati duljinu luka svake porodice krivulje između točaka $M_1(u_1, v_1)$ i $M_2(u_2, v_2)$.

312. Naći ploštine četverokuta na helikoidu:

$$x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = av, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

omeđenog krivuljama: $u = 0,\ u = a,\ v = 0,\ v = 1.$

313. Naći ploštinu krivocrtnog trokuta:

$$u = \pm av, \quad v = 1,$$

smještenog na plohi s prvom kvadratnom formom:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2.$$

314. Naći ploštinu konveksnog kuglinog područja omeđenog petljom krivulje Vivijanija (vidi zad. 55).

315. Naći površinu torusa:

$x = (a + b \cos u) \cos v,\ y = (a + b \cos u) \sin v,\ z = b \sin u, \quad u, v \in [0, 2\pi]$, (vidi zad. 285).

Rješenja

278. $ds^2 = (a^2\cos^2 u + c^2\sin^2 u)\, du^2 + a^2\sin^2 u\, dv^2.$

279. $ds^2 = du^2 + R^2 dv^2.$

280. $ds^2 = (1+k^2)\, du^2 + u^2 dv^2.$

281. $ds^2 = \dfrac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\, dx^2 + \dfrac{2xy}{x^2+y^2}\, dx\, dy + \dfrac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}\, dy^2.$

282. $ds^2 = (a^2+4u^2)\, du^2 + a^2u^2 dv^2.$

283. $ds^2 = (a^2\operatorname{sh}^2 u + c^2\operatorname{ch}^2 u)\, du^2 + a^2\operatorname{ch}^2 u\, dv^2.$

284. $ds^2 = (a^2\operatorname{ch}^2 u + c^2\operatorname{sh}^2 u)\, du^2 + a^2\operatorname{sh}^2 u\, dv^2.$

285. $ds^2 = b^2 du^2 + (a + b\cos u)^2 dv^2.$

286. $ds^2 = a^2\operatorname{ctg}^2 u\, du^2 + a^2\sin^2 u\, dv^2.$

287. a) $ds^2 = \operatorname{ch}^2 \dfrac{u}{a}\, du^2 + a^2\operatorname{ch}^2 \dfrac{u}{a}\, dv^2.$

b) $ds^2 = du^2 + (a^2+u^2)\, dv^2$ prema zad. 221. a) i b).

288. $ds^2 = a^2 du^2 + (a^2u^2 + b^2)\, dv^2.$

289. $ds^2 = du^2 + dv^2.$

290. $[(a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v)\cos^2 u + c^2\sin^2 u]\, du^2 + \dfrac{b^2-a^2}{2}\sin 2u\cos 2v\, du\, dv +$

$+ [\sin^2 u\,(a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v)]\, dv^2$, ili:

$$ds^2 = \{a^2[\cos^2 v + (1-\varepsilon^2)\sin^2 v]\cos^2 u + c^2\sin^2 u]\}\, du^2 -$$

$$-\frac{a^2}{2}\varepsilon^2\sin 2u\cos 2v\, du\, dv + a^2\{\sin^2 u[\sin^2 v + (1-\varepsilon^2)\cos^2 v]\}\, dv^2,$$

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{a^2}(a^2-b^2).$$

291. Usporedivši sa zad. 270. naći ćemo p i q, a zatim zbog $dz = p\,dx + q\,dy$ i $z = c^2 \pm \sqrt{x^2}$
Odatle uz uvjete zadatka: $z^2 = x^2 + y^2$ i $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ (rotacioni stožac).

292. Ploha je sfera, jer je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; u-krivulje $(v = v_0)$ su meridijani, a v-krivulje $(u = u_0$
paralele. $ds^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2$; $dS = |\sin u|\, du\, dv$.

293. u-krivulje $(v = v_0)$ i v-krivulje $(u = u_0)$ su parabole, pa je ploha paraboloid; $E = (\vec{a} + 2u\vec{b} +$
$G = (2v\vec{a} + \vec{b} + u\vec{c})^2$, $F = (\vec{a} + 2u\vec{b} + v\vec{c})\,(2v\vec{a} + \vec{b} + u\vec{c})$;

$$dS = (1-4uv)\,(\vec{a}\times\vec{b}) + (2u^2 - v)\,(\vec{b}\times\vec{c}) + (2v^2 - u)\,(\vec{c}\times\vec{a}).$$

294. U izraz za okomitost dviju krivulja (vidi § 8.3. d)):

$E\, du\, d\bar{u} + F(du\, d\bar{v} + d\bar{u}\, dv) + G\, dv\, d\bar{v} = 0$ uvrstiti podatak da je za prvu krivulju $C_1 : du$
$dv \neq 0$, a za drugu $C_2 : d\bar{v} = -A/B\, d\bar{u}$.

295. Analogno kao prethodni zadatak: C_1 ima $du \neq 0$, $dv \neq 0$, $C_2 : \phi_u\, d\bar{u} + \phi_v\, d\bar{v} = 0$. Odavde uvrs
$d\bar{v} = -\phi_u/\phi_v\, d\bar{u}$ u izraz za okomitost dviju krivulja; $(E\phi_v - F\phi_u)\, du + (F\phi_v - G\phi_u)\, dv =$

296. $v + \operatorname{ctg} u = C.$

297. $v = \dfrac{1}{2u^2} + \beta$, gdje je β parametar.

298. Dvije porodice krivulja na plohi zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu:

$A\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2B\left(\frac{du}{dv}\right) + S = 0$, čija rješenja ćemo označiti s: C_1: $\left(\frac{du}{dv}\right)_1 = \frac{du}{dv}$, a C_2; $\left(\frac{du}{dv}\right)_2 = \frac{d\bar{u}}{d\bar{v}}$. Tako imamo da vrijedi: $\frac{du}{dv}\,\frac{d\bar{u}}{d\bar{v}} = \frac{C}{A}$, $\frac{du}{dv} + \frac{d\bar{u}}{d\bar{v}} = -\frac{2B}{A}$, što uvršteno u uvjet ortogonalnosti dviju krivulja na plohi:

$E\frac{du}{dv}\,\frac{d\bar{u}}{dv} + F\left(\frac{du}{dv} + \frac{d\bar{u}}{d\bar{v}}\right) + G = 0$, daje traženi uvjet:

$EC - 2FB + GA = 0$.

299. Prema prethodnom zadatku. **300.** U uvjet ortogonalnosti dviju krivulja na plohi uvrstiti da je prema uvjetima zadatka:

$$C_1\colon\ dv = -\frac{\cos u}{a}\,du,\ \text{a}\ C_2\colon\ d\bar{v} = \frac{a\cos u}{\sin^4 u}\,d\bar{u}.$$

301. a) $u = \pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$; $v = \pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ (uzeti samo + ili samo −);

b) $\cos\phi = \frac{2a(a^2-1)}{\sqrt{2}\,\sqrt{a^4+1}\,\sqrt{a^4+6a^2+1}}$; c) $a \in \{0, 1, -1\}$.

302. Prema § 8.3.a) i b) uvjet da je neka krivulja na plohi ortogonalna na koordinatnu u-krivulju ($\bar{u} \neq 0$, $\bar{v} = c$, $d\bar{u} \neq 0$, $d\bar{v} = 0$) jest: $Edu + Fdv = 0$, a uvjet ortogonalnosti na koordinatnu v-krivulju ($v \neq 0$, $u = c$, $dv \neq 0$, $du = 0$) jest: $Fd\bar{u} + Gd\bar{v} = 0$. $Edu + Fdv = 0$ daje $2du + dv = 0$, a uvjet $Fd\bar{u} + Gd\bar{v} = 0$ daje:

$d\bar{u} + (u^2+1)\,d\bar{v} = 0$; $2u + v = c_1$ i $u = \mathrm{tg}(c_2 - v)$.

303. Kao prethodni zadatak: $E\,du + F\,dv = 0$ daje: $(v^2 + 2a^2)\,du - a\,dv = 0$, a $F\,d\bar{u} + G\,d\bar{v} = 0$ daje: $-a\,d\bar{u} + d\bar{v} = 0$; $v = a\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{2}(u - c_1)$, $v = au + c_2$.

304. a) $ds^2 = (8u^2 + v^2)\,du^2 + 2uv\,du\,dv + (8v^2 + u^2)\,dv^2)$;

b) $ds = 2\sqrt{2v^2+1}\,dv$, $ds = (8u^2+1)\,du$, $ds = 2u\sqrt{2a^4+a^2+2}\,du$;

c) $s = 3\sqrt{2a^4+a^2+2}$. **305.** $\cos\phi = \frac{1-a^2}{1+a^2}$.

306. $E = v^2\cos^2\alpha$, $G = 1$, $F = 0$, C_1: $d\bar{u} = 0$, $d\bar{v} \neq 0$, C_2: $dv = mv\,du$,

307. $s = |\,\mathrm{sh}\,u_2 - \mathrm{sh}\,u_1|$. **308.** $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$. **309.** $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. $\cos\theta = \frac{m}{\sqrt{m^2+\cos^2\alpha}} = \text{const.}$

310. $s = \sqrt{2}\,|u_2 - u_1|$. **311.** $s = a\left|\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{\sin u}\right| = a\left|\ln\mathrm{tg}\frac{u_2}{2} - \ln\mathrm{tg}\frac{u_1}{2}\right| = a\,|v_2 - v_1|$.

312. $S = \frac{a^2}{2}[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$. **313.** $S = a^2\left[\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \ln(1+\sqrt{2})\right]$. **314.** $S = 2a^2$.

315. $S = \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} b(a + b\cos u)\,dv = 4\pi^2 ab$.